

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS ESPECIALES
TALLER 3
IDENTIDADES Y LOGARITMO COMPLEJO
Grupo de Matemáticas Especiales

I. OBJETIVOS

- (a) Reconocer e identificar las identidades que cumplen las funciones elementales complejas, de las cuales se destacan las funciones trigonométricas y el logaritmo complejo.
- (b) Verificar algunas propiedades que son evidentes cuando $z = x$ es real y explorar las propiedades de estas funciones cuando z es un complejo.

II. EJERCICIOS

1. Verificar cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $(-1 + \sqrt{3}i)^{3/2} = \pm 2\sqrt{2}$

b. $\log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$

c. $\log(1 - i) = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{4}i$

d. $\log(e) = 1 + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$

e. $\log(i) = (2n + \frac{1}{2}) \pi i$ con $n \in \mathbb{Z}$

f. $e^{n\pi i} = (-1)^n$ con $n \in \mathbb{Z}$

g. $\log(-1 + \sqrt{3}i) = \ln(2) + 2(n + \frac{1}{3}) \pi i$ con $n \in \mathbb{Z}$

2. Verifique cada una de las siguientes identidades, las cuales se tienen para todo z .

- | | |
|--|-----------------------------------|
| i. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ | viii. $1 + \tan^2(z) = \sec^2(z)$ |
| ii. $\overline{e^{iz}} = e^{i\bar{z}}$ | ix. $1 + \cot^2(z) = \csc^2(z)$ |
| iii. $\overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z})$ | x. $\sinh(-z) = -\sinh(z)$ |
| iv. $\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z})$ | xi. $\sin(-z) = -\sin(z)$ |
| v. $\overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z})$ | xii. $\cos(-z) = \cos(z)$ |
| vi. $\overline{\sinh(z)} = \sinh(\bar{z})$ | xiii. $\cosh(-z) = \cosh(z)$ |
| vii. $\overline{\cosh(z)} = \cosh(\bar{z})$ | |
| xiv. $\overline{\sin(iz)} = \sin(i\bar{z})$ si, y slo si, $z = n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$. | |

3. Para cada una de las funciones encontrar las partes reales e imaginarias.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| i. $f(z) = e^{3zi}$ | v. $f(z) = \sinh(2z)$ |
| ii. $f(z) = \cos(z)$ | vi. $f(z) = z \cosh(z)$ |
| iii. $f(z) = \sin(2z)$ | vii. $f(z) = e^{-\pi z}$ |
| iv. $f(z) = z^2 e^{2z}$ | viii. $f(z) = z^z$ |

4. Hallar el valor de cada una de las siguientes expresiones.

- | | |
|---|---------------------------|
| i. $4 \sinh\left(\frac{\pi}{3}i\right)$ | v. $\log(3i)$ |
| ii. $\log(-4)$ | vi. $\log(\sqrt{3} - i)$ |
| iii. $\log(-4)$ | vii. $\log(\sqrt{3} - i)$ |
| iv. $\log(3i)$ | |