Universidad Antonio Nariño

Matemáticas Especiales
Guía N° 4: Integración Compleja

Grupo de Matemáticas Especiales

Resumen

Se estudia el concepto de integración tanto para funciones de variable real y valor complejo, como para funciones de variable y valor complejos, éstas últimas integrales de contorno. Se presentan también algunos resultados importantes que relacionan los conceptos de analiticidad e integración y que son muy útiles a la hora de calcular integrales a lo largo de curvas cerradas: el Teorema de Cauchy-Goursat, la fórmula integral de Cauchy y su generalización.

1. Funciones de variable real y valor complejo

Definición 1. Sea f una función de variable real y valor complejo, es decir,

$$\begin{aligned} f:\ S \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(t) = u(t) + i\ v(t) \end{aligned}$$

donde $u(t)$ y $v(t)$ son funciones de variable y valor reales. La *integral de $f(t)$ sobre un intervalo $a \leq t \leq b$* se define como:

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b u(t)\ dt + i \int_a^b v(t)\ dt \tag{1}$$

siempre y cuando las dos últimas integrales existan.

De la definición se sigue de inmediato que

$$Re\left[\int_a^b f(t)\ dt\right] = \int_a^b Re\left[f(t)\right]\ dt$$
$$Im\left[\int_a^b f(t)\ dt\right] = \int_a^b Im\left[f(t)\right]\ dt$$

Propiedades

Sean f y g funciones de variable real y valor complejo integrables en el intervalo $[a,b]$. Entonces,

1. Si $k \in \mathbb{C}$ es una constante, entonces $\int_a^b [kf(t)]\ dt = k\int_a^b f(t)\ dt$.
2. $\int_a^b [f(t)+g(t)]\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt$.
3. Si $a \leq c \leq b$, entonces $\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt$.
4. $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$.

Ejemplo 2.

1. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\int_0^1 (4+2it)^2\ dt$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4+2it)\ dt &= \int_0^1 \left(16+16it-4t^2\right)\ dt\\ &= \left[16t+8it-\frac{4}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{44}{3}+8i.\end{aligned}$$

   b) $\int_1^2 \left(4t^2+it^3\right)(2t-i)\ dt$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(4t^2+it^3\right)(2t-i)\ dt &= \int_1^2 \left(2it^4+9t^3-4it^2\right)\ dt\\ &= \left[\frac{2}{5}it^5+\frac{9}{4}t^4-\frac{4}{3}it^3\right]_1^2 = \frac{135}{4}+\frac{46}{15}i.\end{aligned}$$

c) $\int_0^\pi \left[2e^{it} + 3i\cos(t)\right]\ dt.$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left[2e^{it} + 3i\cos(t)\right]\ dt &= \int_0^\pi \left[2\cos(t) + 2i\operatorname{sen}(t) + 3i\cos(t)\right]\ dt\\ &= \left[2\operatorname{sen}(t) - 2i\cos(t) + 3i\operatorname{sen}(t)\right]_0^\pi\\ &= 2i - (-2i) = 4i.\end{aligned}$$

2. Muestre que si $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}\ d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ 2\pi, & \text{si } m = n \end{cases}$$

Por casos:

- Si $m = n$ entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}\ d\theta = \int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-im\theta}\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

- Si $m \neq n$ entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}\ d\theta &= \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\ d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)\theta + i\operatorname{sen}(m-n)\theta\right]\ d\theta\\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)\theta}{m-n} - i\frac{\cos(m-n)\theta}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2. Funciones de variable y valor complejos

Las integrales de funciones de variable y valor complejos se definen a lo largo de curvas sobre el plano complejo, de manera análoga a como se definen las integrales de línea en variable real. Por tal razón, antes de definir las integrales de contorno, primero se estudian algunos conceptos relacionados con las curvas en el plano.

2.1. Curvas en el plano complejo

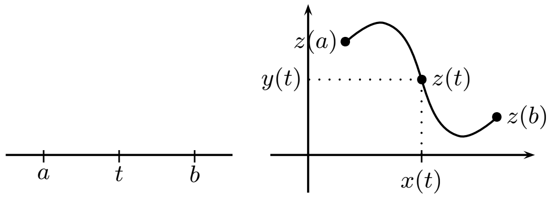
Definición 3. Un conjunto de puntos $z = (x, y)$ en el plano complejo es un *arco* C si

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

con $x(t)$ y $y(t)$ funciones continuas del parámetro real t. A menudo se escribe

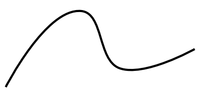
$$C: \quad z = z(t) = x(t) + i\ y(t), \qquad a \leq t \leq b, \tag{2}$$

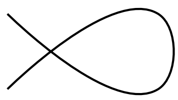
para hacer explícita la *parametrización del arco.*

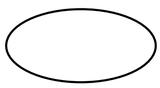


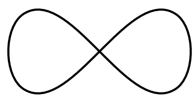
Definición 4. Se denomina *arco simple* o *arco de Jordan* a un arco que no se cruza a sí mismo.

Si una curva C es simple excepto porque $z(a) = z(b)$, se dice que C es una *curva simple cerrada* o una *curva de Jordan*


Arco simple


Arco no simple


Curva cerrada simple


Curva cerrada no simple

Definición 5. Se dice que $C : z(t) = x(t) + i\ y(t)$, $a \leq t \leq b$, es un *arco diferenciable* o *arco suave* si las componentes de $z'(t) = x'(t) + i\ y'(t)$ son continuas en $[a, b]$. En este caso, la función de valor real

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

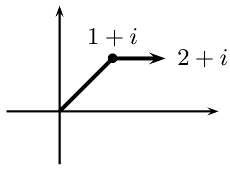
es integrable en $[a, b]$ y además, la *longitud de* C está dada por

$$L = \int_a^b \left|z'(t)\right|\ dt.$$

Definición 6. Un *contorno* es un arco formado por un número finito de arcos suaves unidos. Cuando sólo los valores inicial y final coinciden, el contorno es *cerrado.*

Ejemplo 7. A continuación se presentan algunos contornos simples y su correspondiente parametrización.

1. $z(t) = \begin{cases} t + it, & 0 \leq t \leq 1 \\ t + i, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$



   es el arco formado por dos segmentos de recta, uno va del origen a $1+i$, y el otro va de $1+i$ a $2+i$. Es un contorno pues es la unión de dos curvas suaves.

2. $z(t) = z_0 + re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, corresponde a la circunferencia centrada en z_0 y con radio r. Claramente es un contorno simple y cerrado.

   En particular, $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es la parametrización de la circunferencia unitaria; mientras que $z(t) = e^{2it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es la circunferencia unitaria pero recorrida dos veces.

$\diamondsuit$

2.2. Integrales de contorno

Definición 8. Sean f una función de variable y valor complejos

$$\begin{aligned} f : S \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

y $C : z(t) = x(t) + i\ y(t)$, $a \leq t \leq b$, un contorno extendido desde $z_1 = z(a)$ hasta $z_2 = z(b)$.

Si f es continua a trozos sobre C, se define la *integral de linea* o *integral de contorno* de f a lo largo de C como

$$\int_C f(z)\ dz = \int_a^b f\left[z(t)\right]\ z'(t)\ dt \tag{3}$$

En particular, si el contorno C es cerrado se usa la notación

$$\oint_C f(z)\ dz = \int_a^b f\left[z(t)\right]\ z'(t)\ dt \tag{4}$$

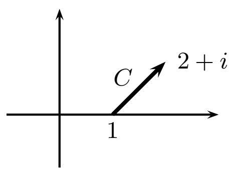
Propiedades

Sean, C un contorno extendido desde z_1 hasta z_2 y f, g funciones de variable y valor complejos integrables a lo largo de C. Entonces,

1. Si $k \in \mathbb{C}$ es una constante, entonces $\int_C \left[k f(z)\right]\ dz = k \int_C f(z)\ dz$.
2. $\int_C \left[f(z) + g(z)\right]\ dz = \int_C f(z)\ dz + \int_C g(z)\ dz$.
3. Si se considera el contorno C recorrido desde z_2 hasta z_1, denotado como $-C$, entonces $\int_{-C} f(z)\ dz = -\int_C f(z)\ dz$.
4. Si $C = C_1 + C_2$, entonces $\int_C f(z)\ dz = \int_{C_1} f(z)\ dz + \int_{C_2} f(z)\ dz$.

Ejemplo 9. Evalúe las siguientes integrales de contorno.

1. $\int_C Re(z)\ dz$, donde C es el segmento de recta de 1 a $2+i$ orientado positivamente.



La parametrización de este segmento está dada por

$$x(t) = t, \quad y(t) = t - 1, \quad \text{con } 1 \leq t \leq 2$$

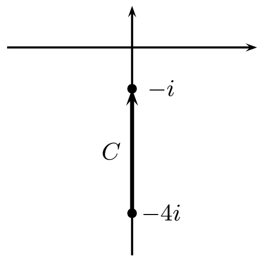
de donde,

$$\begin{aligned} z(t) &= t + i(t-1), \quad 1 \leq t \leq 2 \\ z'(t) &= 1 + i \\ f\left[z(t)\right] &= Re\left[t + i(t-1)\right] = t \end{aligned}$$

y de esta forma,

$$\begin{aligned}\int_C Re(z)\ dz &= \int_1^2 Re\,[z(t)]\ z'(t)\ dt = \int_1^2 t(1+i)\ dt\\ &= \frac{1+i}{2}\ t^2\Big|_1^2 = \frac{3}{2}(1+i)\end{aligned}$$

2. $\int_C \operatorname{sen}(2z)\ dz$ donde C es el segmento de recta desde $-i$ hasta $-4i$ orientado positivamente.



En este caso, la parametrización del segmento C está dada por

$$x(t) = 0, \quad y(t) = t, \quad \text{con } -4 \leq t \leq -1.$$

Por lo tanto,

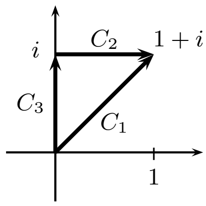
$$\begin{aligned} z(t) &= it, \quad -4 \leq t \leq -1\\ z'(t) &= i\\ f\,[z(t)] &= \operatorname{sen}\,[2(it)] = \operatorname{sen}(2it) = i\operatorname{senh}(2t),^{*}\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{sen}(2z)\ dz &= \int_{-4}^{-1} i\operatorname{senh}(2t)\ i\ dt = -\int_{-4}^{-1} \operatorname{senh}(2t)\ dt\\ &= -\frac{\cosh(2t)}{2}\Big|_{-4}^{-1} = \frac{-\cosh(2)+\cosh(8)}{2}\end{aligned}$$

3. $\int_C f(z)\ dz$, donde $f(z) = y - x - 3ix^2$ y C es el triángulo presentado en la figura que sigue:

[*] Recuerde que $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh}(z)$.



Dado que $C = C_1 - C_2 - C_3$ entonces

$$\int_C f(z)\ dz = \int_{C_1} f(z)\ dz - \int_{C_2} f(z)\ dz - \int_{C_3} f(z)\ dz$$

Se hace el análisis para cada curva:

- La parametrización de C_1 es

$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 1$$

  y de aquí se sigue:

$$\begin{aligned} z(t) &= t + it \\ z'(t) &= 1 + i \\ f\left[z(t)\right] &= t - t - 3i(t^2) = -3it^2 \end{aligned}$$

  luego,

$$\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_0^1 -3it^2(1+i)\ dt = -3i(1+i)\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = 1 - i$$

- La parametrización de C_2 es

$$x(t) = t, \quad y(t) = 1, \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 1,$$

  de donde

$$\begin{aligned} z(t) &= t + i, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z'(t) &= 1 \\ f\left[z(t)\right] &= 1 - t - 3it^2 \end{aligned}$$

  entonces,

$$\int_{C_2} f(z)\ dz = \int_0^1 \left(1 - t - 3it^2\right) 1\ dt = \left[t - \frac{t^2}{2} - 3i\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - i$$

- La parametrización de C_3 es

$$x(t) = 0, \quad y(t) = t, \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 1$$

luego,

$$\begin{aligned} z(t) &= it, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z'(t) &= i \\ f\left[z(t)\right] &= t \end{aligned}$$

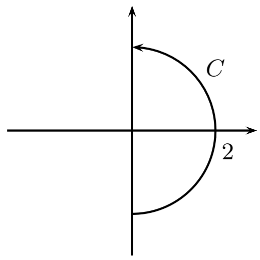
de donde,

$$\int_{C_3} f(z)\ dz = \int_0^1 t\ i\ dt = i\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}i$$

Por lo tanto,

$$\int_C f(z)\ dz = 1 - i - \left(\frac{1}{2} - i\right) - \left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

4. $\int_C \overline{z}\ dz$, donde C es la mitad derecha de la circunferencia centrada en el origen de radio 2.

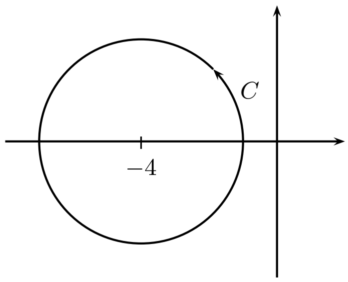


En este caso,

$$\begin{aligned} z(t) &= 2e^{it}, \quad \text{donde } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ z'(t) &= 2ie^{it} \\ f\left[z(t)\right] &= \overline{z(t)} = \overline{2e^{it}} = 2e^{\overline{it}} = 2e^{-it}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_C \overline{z}\ dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2e^{-it}\ 2ie^{it}\ dt = 4i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 4\pi i$$



5. $\int_C ze^{-z^2}\,dz$, donde C es la circunferencia centrada en -4 con radio 3 positivamente orientada.

   La parametrización de la circunferencia está dada por

$$z(t) = -4 + 3e^{it}, \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

   y de esta manera,

$$z'(t) = 3ie^{it}$$
$$f(z(t)) = \left(-4 + 3e^{it}\right) e^{-\left(-4+3e^{it}\right)^2}.$$

   Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_C ze^{-z^2}\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(-4 + 3e^{it}\right) e^{-\left(-4+3e^{it}\right)^2}\, 3ie^{it}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\left(-4+3e^{it}\right)^2}\Big|_0^{2\pi} \\ &=^{**} -\frac{1}{2}\left[e^{-(-4+3)^2} - e^{-(-4+3)^2}\right] = 0.\end{aligned}$$

6. $\int_C Im(z)\,dz$, donde C es la circunferencia unitaria positivamente orientada.

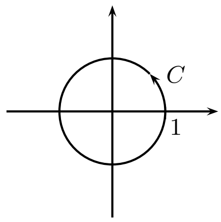
   Como se había visto antes, la parametrización de C está dada por

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   Entonces

$$z'(t) = -\operatorname{sen} t + i\cos t$$
$$f\left[z(t)\right] = Im\left(\cos t + i\operatorname{sen} t\right) = \operatorname{sen} t$$

** Recuerde que $e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi) = 1$.



y de aquí

$$\begin{aligned}\int_C Im(z)\ dz &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t + i\cos t)\ dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\ dt + i\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\ dt \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} - \frac{t}{2} + i\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = -\pi\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3. El Teorema de Cauchy-Goursat

Este importante y útil resultado relaciona los conceptos de analiticidad e integrabilidad de una función.

Sea $C : z(t) = x(t) + i\ y(t)$, $a \le t \le b$, un contorno simple, cerrado y positivamente orientado. Supongamos además que f es una función analítica sobre C y en el interior de C. Dado que

$$\oint_C f(z)\ dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)\ dt,$$

al tomar $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$, el integrando del lado derecho es

$$\begin{aligned}f\left[z(t)\right] z'(t)\ dt &= \left[u(x,y) + i\ v(x,y)\right]\ \left[x'(t) + i\ y'(t)\right] \\ &= \left[u(x,y)x'(t) - v(x,y)y'(t)\right] + i\ \left[u(x,y)y'(t) + v(x,y)x'(t)\right]\end{aligned}$$

o de manera simplificada,

$$f\left[z(t)\right] z'(t)\ dt = (u\ dx - v\ dy) + i\left(u\ dy + v\ dx\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\ dz &= \oint_C (u\ dx - v\ dy) + i \oint_C (v\ dx + u\ dy) \\ &= \iint_R (-v_x - u_y)\ dA + i \iint_R (u_x - v_y)\ dA\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene en virtud del Teorema de Green. Además, como f es analítica se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, $u_x = v_y$ y $v_x = -u_y$, y de esta manera

$$\oint_C f(z)\ dz = 0.$$

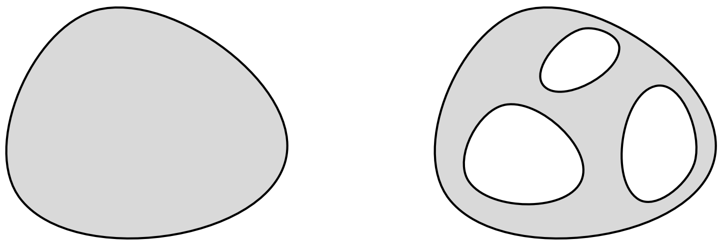
Nótese que la orientación de la curva C no importa, ya que

$$\oint_C f(z)\ dz = -\oint_{-C} f(z)\ dz = 0.$$

Teorema 10 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Sean C una curva simple y cerrada, y f una función analítica sobre y en el interior de C. Entonces*

$$\oint_C f(z)\ dz = 0 \tag{5}$$

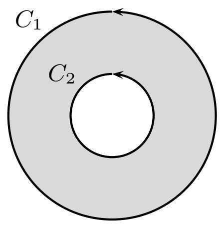
Definición 11. Un *dominio simplemente conexo* D es un dominio tal que cada contorno cerrado simple contenido en él encierra sólo puntos de D, en otras palabras, es una región que no tiene agujeros. Si un dominio no es simplemente conexo se denomina *multiplemente conexo* (con agujeros).



Dominio simplemente conexo   Dominio multiplemente conexo

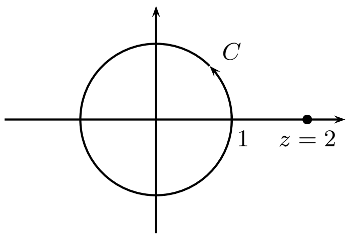
Corolario 12 (Principio de deformación). *Sean C_1 y C_2 contornos positivamente orientados, simples y cerrados, donde C_2 es interior a C_1. Si una función f es analítica en la región que consiste en todos los puntos fuera de C_2 pero dentro de C_1 y sobre las curvas, entonces*

$$\oint_{C_1} f(z)\ dz = \oint_{C_2} f(z)\ dz$$



Ejemplo 13. Evalúe la $\oint_C f(z)\, dz$ sobre la trayectoria C dada, orientada positivamente. Determine en qué casos es posible usar el Teorema de Cauchy-Goursat.

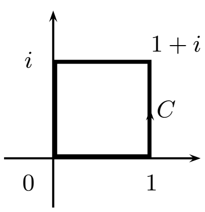
1. $f(z) = \dfrac{z^4}{z-2}$ y C es la circunferencia $|z| = 1$.



La función f es analítica en todo punto salvo en $z = 2$, pues allí el denominador es cero. Sin embargo, dado que este punto está fuera de C, se satisfacen las hipótesis del Teorema de Cauchy-Goursat y por ello:

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C \frac{z^4}{z-2}\, dz = 0.$$

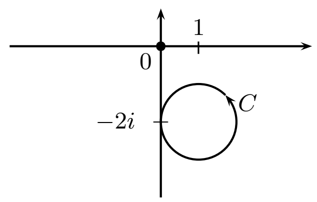
2. $f(z) = z^2 \operatorname{sen} z$ y C es el cuadrado con vértices 0, 1, $1+i$, i.



En este caso f es entera, en particular es analítica en el interior y sobre C. Por lo tanto, en virtud del Teorema de Cauchy-Goursat se sigue

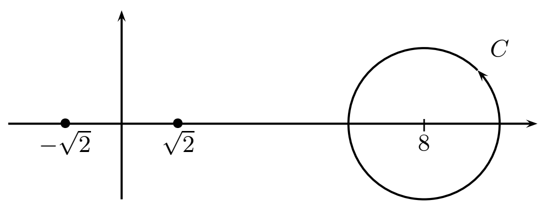
que:
$$\oint_C f(z)\ dz = \oint_C z^2 \operatorname{sen} z\ dz = 0.$$

3. $f(z) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ y C es el circunferencia $|z - 1 + 2i| = 1$.



La función f es analítica en todo punto salvo en $z = 0$. Sin embargo, este punto está fuera de la curva C. Por lo tanto, a partir del Teorema de Cauchy-Goursat se puede concluir que
$$\oint_C f(z)\ dz = \oint_C \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)\ dz = 0.$$

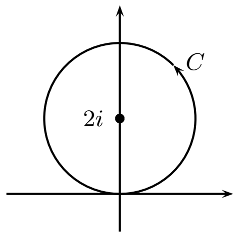
4. $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 4}{z^2 - 2}$ y C es la circunferencia $|z - 8| = 2$. f es analítica



en todos los puntos excepto en $z = \pm\sqrt{2}$, pero estos puntos están fuera de la circunferencia C, entonces por el Teorema de Cauchy-Goursat
$$\oint_C f(z)\ dz = \oint_C \frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 - 2}\ dz = 0.$$

5. $f(z) = \dfrac{1}{(z - 2i)^3}$ y C es la circunferencia $|z - 2i| = 2$.

Nótese que en este caso, la función f tiene una singularidad en $z = 2i$ y este es precisamente el centro de la circunferencia C, por lo tanto *no*



es posible usar el Teorema de Cauchy-Goursat para calcular la integral y es necesario hacer el cálculo a partir de la definición. Como

$$\begin{aligned} z(t) &= 2i + 2e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z'(t) &= 2ie^{it} \\ f\left[z(t)\right] &= \frac{1}{\left(2i + 2e^{it} - 2i\right)^2} = \frac{1}{8e^{3it}}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z-2i)^3}\, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8e^{3it}}\; 2i\; e^{it}\; dt = \frac{1}{4} i \int_0^{2\pi} e^{-2it}\; dt \\ &= -\frac{1}{8}\; e^{-2it}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{8}\left(e^{-4\pi i} - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

Nótese el hecho de que no se pueda aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat no implica que $\oint_C f(z)\; dz \neq 0$.

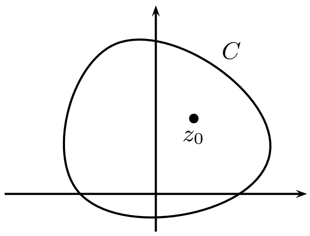
$\diamondsuit$

4. La Fórmula Integral de Cauchy

El teorema que sigue y su posterior generalización relacionan la evaluación de una integral de contorno cerrado con las derivadas de una parte del integrando.

Teorema 14 (Fórmula Integral de Cauchy). *Sea f una función analítica en el interior y sobre un contorno C simple, cerrado y positivamente orientado. Si z_0 es cualquier punto interior a C, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\; dz \tag{6}$$



Se sigue de la fórmula integral de Cauchy que si una función es analítica en un punto, entonces sus derivadas de todos los órdenes existen en cada puntos y a su vez son funciones analíticas. Además se pueden demostrar las fórmulas

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz \tag{7}$$

$$f''(z_0) = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\, dz \tag{8}$$

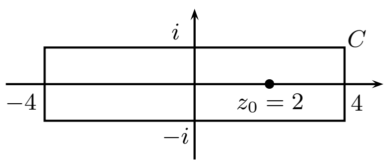
y en general para $n = 0, 1, 2 \dots$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \tag{9}$$

Nótese que si se verifican las condiciones del Teorema de la fórmula integral de Cauchy, es posible calcular integrales de contorno cerrado evaluando la derivada de la función f en el punto z_0 y multiplicando por un factor adecuado.

Ejemplo 15. Evalúe la $\oint_C g(z)\ dz$ donde la curva C está positivamente orientada.

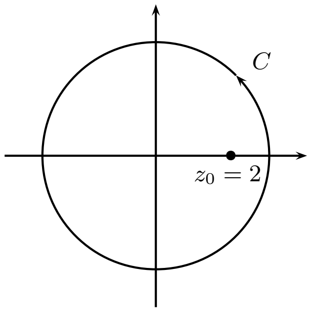
1. $g(z) = \dfrac{2z^3}{(z-2)^2}\ dz$ y C es el rectángulo con vértices $4+i$, $4-i$, $-4+i$, $-4-i$.



Aquí $f(z) = 2z^3$ es una función entera y en particular analítica en el interior y sobre C, y además el punto $z_0 = 2$ es interior a C. Por lo tanto de (9) con $n = 1$, teniendo en cuenta que $f'(z) = 6z^2$, se sigue que

$$\oint_C \frac{2z^3}{(z-2)^2}\, dz = 2\pi i\ f'(2) = 2\pi i \left[6\left(2^2\right)\right] = 48\pi i.$$

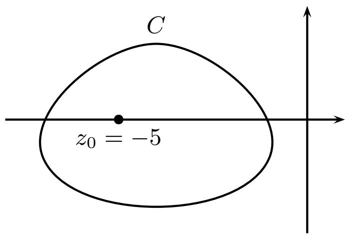
2. $g(z) = \dfrac{e^z}{z-2}$ y C es la circunferencia $|z| = 3$.



En este caso $f(z) = e^z$ es entera, en particular es analítica en el interior y sobre C, y además el punto $z_0 = 2$ es interior a C. Por lo tanto, de (6) se sigue que

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2}\, dz = 2\pi i\ f(2) = 2\pi i\ e^2.$$

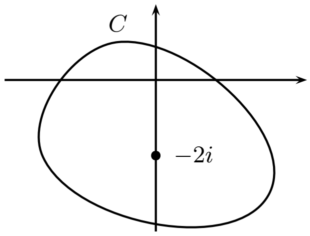
3. $g(z) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(z^2\right)}{z+5}$ y C es cualquier trayectoria cerrada que encierra a -5.



En este caso, $f(z) = \operatorname{sen}\left(z^2\right)$ es entera, en particular es analítica sobre y en el interior de C, y $z_0 = -5$ es interior a C pues esta es la condición impuesta a la curva. Por lo tanto, de (6) se sigue que

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}\left(z^2\right)}{z+5}\, dz = 2\pi i\ f(-5) = 2\pi i \operatorname{sen}\left[(-5)^2\right] = 2\pi i \operatorname{sen}(25).$$

4. $g(z) = \dfrac{\cos(z-i)}{(z+2i)^3}$ y C es cualquier trayectoria cerrada que encierra a $-2i$.



Aquí se tiene que $f(z) = \cos(z-i)$ es analítica en el interior y sobre C (es una función entera), y además $z_0 = -2i$ está en el interior de C pues así está dada C. Entonces usando (9) con $n = 2$ y teniendo en cuenta que

$$f'(z) = -\operatorname{sen}(z-i), \qquad f''(z) = -\cos(z-i)$$

se tiene que

$$\oint_C \frac{\cos(z-i)}{(z+2i)^3}\,dz = \pi i f''(-2i) = -\pi i\ \cos(-2i-i) = -\pi i\ \cos(3i).$$

$\diamondsuit$

Bibliografía

[1] R.V. Churchill, *Variable compleja con aplicaciones*, McGraw-Hill, New York. 1990.

[2] Peter V. O'Neil, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, International Thomson Editores, S.A. Quinta Edición. 2004.

[3] W. Allen Smith, *Elementary Complex Variables*, Charles E. Merrill Publishing Company, 1974.