Universidad Antonio Nariño

Matemáticas Especiales
Guía N° 3: Funciones elementales complejas: exponencial, logaritmo, trigonométricas e hiperbólicas

Grupo de Matemáticas Especiales

Resumen

Se presenta la definición de las funciones elementales de variable compleja: exponencial, logaritmo, trigonométricas e hiperbólicas. Se estudian las similitudes y diferencias entre estas funciones y sus análogas en variable real. A partir de la definición del logaritmo y la exponencial complejas se definen las potencias complejas y su correspondiente valor principal.

1. Función Exponencial Compleja

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Se define la *exponencial de z* como

$$e^z = e^x \; e^{iy}. \tag{1}$$

A partir de la conocida *fórmula de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

es posible reescribir (1) como sigue

$$e^z = e^x\left(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y\right). \tag{2}$$

Nótese que si $z = x + i0$ es un número real, entonces e^z se reduce a la función exponencial real e^x.

Propiedades de la función exponencial

Si $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces se puede verificar que:

1. $e^0 = 1$
2. $e^z \neq 0$
3. $e^{z_1}\ e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
4. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
5. $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
6. e^z es una función entera y además $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$.
7. Si $z = x + iy$ entonces
   a) $|e^z| = e^x$.
   b) $arg\,(e^z) = y + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.
8. e^z es periódica de periodo imaginario $2\pi i$, es decir, $e^{z+2\pi i} = e^z$.
9. e^z puede tomar valores negativos.
10. Se tienen las siguientes identidades útiles:
    a) $e^{2\pi i} = 1$
    b) $e^{\pi i} = -1$
    c) $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$
    d) $e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$

Obsérvese que las propiedades 1 a 6 también se tienen para la función exponencial real, mientras que de la 7 a la 10 son características y propias de la función exponencial compleja.

Si $z = x + iy$ entonces de la definición de e^z se sigue que

$$e^z = u(x, y) + i\ v(x, y)$$

donde $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ son la parte real y la parte imaginaria de e^z, respectivamente.

Ejemplo 1. A continuación se consideran algunas ecuaciones e identidades que involucran exponenciales.

1. Encuentre todos los valores de z tales que $e^z = -2$.

   Como $e^{\pi i} = -1$,
   $$e^x\ e^{iy} = 2\ e^{\pi i}$$
   entonces
   $$e^x = 2 \qquad\qquad y = \pi + 2n\pi$$
   $$x = \ln 2 \qquad\qquad y = (2n+1)\pi$$
   y de esta manera
   $$z = x + iy = \ln 2 + i(2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Encuentre todos los valores de z tales que $e^z = 1 + 2i$.

   De la definición de e^z se sigue que
   $$e^x \cos y + i\ e^x \operatorname{sen} y = 1 + 2i,$$
   entonces
   $$e^x \cos y = 1 \qquad\qquad e^x \operatorname{sen} y = 2. \tag{3}$$
   Después de elevar ambas ecuaciones al cuadrado y sumarlas se obtiene
   $$e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \operatorname{sen}^2 y = 1 + 4 = 5$$
   de donde $e^{2x} = 5$, es decir, $x = \dfrac{\ln 5}{2} = \ln \sqrt{5}$.

   Por otro lado, al hacer el cociente de las ecuaciones (3) se obtiene
   $$\frac{e^x \operatorname{sen} y}{e^x \cos y} = \frac{2}{1}$$
   de donde $\tan y = 2$, esto es, $y = \arctan(2) + n\pi$. Por lo tanto
   $$z = x + iy = \ln \sqrt{5} + i\,(\arctan(2) + n\pi)$$

3. Muestre que $e^{2+3\pi i} = -e^2$.

   Se tiene que
   $$e^{2+3\pi i} = e^2\ e^{3\pi i} = e^2\,(\cos(3\pi) + i\ \operatorname{sen}(3\pi)) = e^2(-1 + i0) = -2$$

4. Verifique que $e^{\frac{2+\pi i}{4}} = \sqrt{\frac{e}{2}}\ (1+i)$.

   En efecto,

$$\begin{aligned} e^{\frac{2+\pi i}{4}} &= e^{\frac{1}{2}}\ e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sqrt{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}\ (1+i) \end{aligned}$$

5. Considere la función $f(z) = e^{\overline{z}}$. ¿Dónde es f analítica?

   Si $z = x + iy$ entonces

$$f(z) = e^x\ e^{-iy} = e^x\left[\cos(-y) + i\ \operatorname{sen}(-y)\right] = e^x\cos y - i\ e^x \operatorname{sen} y$$

   luego

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x\cos y \\ u_x &= e^x\cos y \\ u_y &= -e^x\operatorname{sen} y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v(x,y) &= -e^x\operatorname{sen} y \\ v_x &= -e^x\operatorname{sen} y \\ v_y &= -e^x\cos y. \end{aligned}$$

   Veamos qué ocurre con las ECR,

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ e^x\cos y &= -e^x\cos y \\ \cos y &= 0 \\ y &= \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n\in\mathbb{Z} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_y &= -v_x \\ -e^x\operatorname{sen} y &= e^x\operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen} y &= 0 \\ y &= n\pi, \quad n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

   lo que es contradictorio! pues ningún valor y verifica las dos últimas ecuaciones simultáneamente. Por lo tanto f satisface las ECR en ninguna parte y así $f = e^{\overline{z}}$ es analítica en ninguna parte.

$\diamondsuit$

2. Función Logaritmo Complejo

Para definir el logaritmo complejo se requiere resolver la ecuación $e^w = z$, donde w es la variable y z es un número complejo dado.

Sea $z = re^{i\theta}$, con $-\pi < \theta < \pi$, y sea $w = u + iv$. Entonces de la ecuación $e^w = z$ se sigue que

$$e^x\ e^{iy} = r\ e^{i\theta},$$

de donde

$$\begin{aligned} e^x &= r & \qquad y &= \theta + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x &= \ln r & & \end{aligned}$$

y de esta manera $w = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Se define el *logaritmo de* $z = re^{i\theta}$ como

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi), \tag{4}$$

donde $\theta = Arg(z)$. Nótese que para cada z esta función toma infinitos valores (dependiendo del valor de n) y por esta razón se dice que el logaritmo complejo es una función *multivaluada*.

Cuando $n = 0$ en (4), el logaritmo resultante se denota por Log z

$$\text{Log } z = \ln r + i\theta \tag{5}$$

y se conoce como el *valor principal del logaritmo* de z, o simplemente el *logaritmo principal* de z. Observe que para cada z, Log z toma un solo valor y además,

$$\log z = \text{Log } z + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 2. Para los números complejos dados determinar $\log z$ y Log z.

1. $z = i$
   Como $i = 1\ e^{\frac{\pi}{2}i}$, entonces

   $$\log i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = i\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

   y Log $i = \dfrac{\pi}{2} i$.

2. $z = -1$
   Dado que $-1 = 1\ e^{i\pi}$, entonces

   $$\log(-1) = \ln 1 + i\left(\pi + 2n\pi\right) = i\pi\left(1 + 2n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

   y Log $(-1) = i\pi$.

3. $z=-1+i\sqrt{3}$
En este caso, $-1+i\sqrt{3}=2\ e^{\frac{2\pi}{3}i}$ entonces

$$\log\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\ln 2+i\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)=\ln 2+2\pi i\left(\frac{1}{3}+n\right),\quad n\in\mathbb{Z}$$

y $\mathrm{Log}\ \left(-1+i\sqrt{3}\right)=\ln 2+\dfrac{2\pi}{3}i.$

4. $z=-2-2i$
Como $-2-2i=\sqrt{8}\ e^{-\frac{3\pi}{4}i}$, entonces para $n\in\mathbb{Z}$

$$\log\left(-2-2i\right)=\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right)=\frac{1}{2}\ln 8+i\pi\left(-\frac{3}{4}+2n\right),$$

y $\mathrm{Log}\ \left(-2-2i\right)=\dfrac{1}{2}\ln 8-\dfrac{3\pi}{4}i.$

$\diamondsuit$

2.1. Propiedades del logaritmo

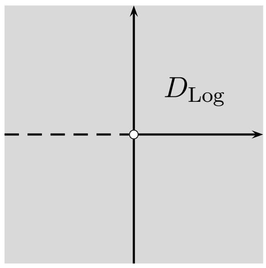
A continuación se presentan algunas propiedades del logaritmo complejo. Sean $z, z_1, z_2\in\mathbb{C}$,

1. Si $z=x+i0$ es un número real entonces $\log z$ se reduce al logaritmo natural real $\ln x$.
2. $\log(z_1\ z_2)=\log z_1+\log z_2$.
3. $\log\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\log z_1-\log z_2$.
4. Si $z\neq 0$ y $n\in\mathbb{Z}$ entonces $z^n=e^{n\log z}$.
5. $\log\left(e^z\right)=z+2n\pi i$, $n\in\mathbb{Z}$
6. Para $n=1,2,\ldots$ fijo se tiene

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\quad k=0,1,\ldots,n-1\\ &= e^{\frac{1}{n}\ln r+i\ \frac{\theta+2k\pi}{n}},\quad k=0,1,\ldots,n-1\\ &= e^{\frac{1}{n}\log z}\end{aligned}$$

7. Si D_{Log} es el conjunto de puntos en el plano complejo que no están en el eje real negativo y distintos de cero, entonces Log z es una función analítica en D_{Log} y además para $z \in D_{\text{Log}}$

$$\frac{d}{dz}\text{Log } z = \frac{1}{z}$$



Observación 1. Es necesario explicar el sentido de las igualdades en las propiedades 2 y 3. Por ejemplo para demostrar 2, sean $z_1 = r_1\ e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2\ e^{i\theta_2}$. Entonces

$$\begin{aligned}\log(z_1\ z_2) &= \log\left(r_1 r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right) = \ln(r_1\ r_2) + i\,(\theta_1+\theta_2+2n\pi)\\ &= \ln r_1 + \ln r_2 + i(\theta_1+\theta_2+2n\pi)\\ &= \underbrace{\ln r_1 + i(\theta_1+2n\pi)}_{\text{un valor de } \log z_1} + \underbrace{\ln r_2 + i\theta_2}_{\text{un valor de } \log z_2}\end{aligned}$$

Observación 2. En general

$$\text{Log }\ (z_1\ z_2) \neq \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2.$$

Por ejemplo, si $z_1 = z_2 = -1$ entonces de una parte

$$\text{Log } z_1 = \text{Log } z_2 = \text{Log } (-1) = i\pi$$

y de otro lado

$$\text{Log } (z_1\ z_2) = \text{Log }\ [(-1)(-1)] = \text{Log } (1) = 0,$$

de donde Log $(z_1\ z_2) = 0 \neq 2\pi i = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$.

3. Exponentes Complejos

Sean $z, c \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$. Se define

$$z^c = e^{c \ \log z}, \tag{6}$$

la cual claramente es una función multivaluada. Si se toma $\text{Log}\ z$ en lugar de $\log z$ en (6) se obtiene el *valor principal* de z^c, que se denota por

$$v.p\ z^c = e^{c\ \text{Log}\ z} \tag{7}$$

Ejemplo 3. Calcule las siguientes potencias y determine su valor principal.

1. i^i
   Como $\log i = i\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right)$ entonces

   $$i^i = e^{i\ \log i} = e^{i\ i\pi\left(\frac{1}{2}+2n\right)} = e^{-\pi\left(\frac{1}{2}+2n\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

   y de esta manera $v.p\ i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$, un número real!

2. $(1-i)^{4i}$
   Teniendo en cuenta que $\log(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\pi\left(-\frac{1}{4} + 2n\right)$ (verifíquelo!), entonces

   $$\begin{aligned}(1-i)^{4i} &= e^{4i\ \log(1-i)} = e^{4i\ \left[\frac{1}{2}\ln 2 + i\pi\left(-\frac{1}{4}+2n\right)\right]} \\ &= e^{2i\ln 2 + \pi(1-8n)} = e^{\pi(1-8n)}e^{i\ln 4}, \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

   y así, $v.p\ (1-i)^{4i} = e^{\pi}e^{i\ln 4} = e^{\pi}\left[\cos(\ln 4) + i\,\text{sen}(\ln 4)\right]$.

3. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{1+i}$
   Dado que $1 + i\sqrt{3} = 2\ e^{\frac{\pi}{3}i}$, es inmediato que

   $$\log\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right).$$

   Por lo tanto, para $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

   $$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{1+i} = e^{(1+i)\left[\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)\right]} = 2e^{-\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)}e^{i\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)},$$

   y

   $$v.p\ \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{1+i} = 2\ e^{-\frac{\pi}{3}}\left[\cos\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

$\diamondsuit$

Propiedades de las potencias complejas

Sea $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$. Las siguientes igualdades son válidas en el sentido de valores principales de potencias complejas:

1. $z^{\alpha}\ z^{\beta} = z^{\alpha+\beta}$.
2. $\dfrac{z^{\alpha}}{z^{\beta}} == z^{\alpha-\beta}$.
3. $\dfrac{d}{dz}\,(z^{\alpha}) = \alpha\ z^{\alpha-1}$

4. Funciones Trigonométricas

Como es bien conocido, las funciones reales seno y coseno se pueden expresar en términos de la función exponencial, es decir,

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \text{para todo } x \text{ real}$$

Esto sugiere las siguientes definiciones para los valores complejos $z = x + iy$:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{8}$$

En correspondencia con las definiciones del cálculo real, se definen

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \tag{9}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}. \tag{10}$$

Dado que la función e^z es analítica para todo z, de (8) se sigue que las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ también lo son. De las definiciones en (9) y (10) se tiene que las funciones $\tan z$ y $\sec z$ son analíticas excepto en los puntos en los que $\cos z$ es cero, y las funciones $\cot z$ y $\csc z$ son analíticas excepto donde $\operatorname{sen} z$ es cero.

Las funciones $\cos z$ y $\sec z$ son pares, mientras que las demás son impares, esto es:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \quad \tan(-z) = -\tan z, \quad \sec(-z) = \sec z, \\ &\cos(-z) = \cos z, \qquad \cot(-z) = -\cot z, \quad \csc(-z) = -\csc z. \end{aligned} \tag{11}$$

Como la función exponencial compleja e^z es periódica entonces también lo son las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z \pm 2n\pi) &= \operatorname{sen} z, \qquad & \tan(z \pm n\pi) &= \tan z, \\ \cos(z \pm 2n\pi) &= \cos z, \qquad & \cot(z \pm n\pi) &= \cot z, \end{aligned} \tag{12}$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$ Además,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z = 0 \quad &\text{si y sólo si} \quad z = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ \cos z = 0 \quad &\text{si y sólo si} \quad z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{13}$$

A partir de las definiciones (8), (9) y (10) es sencillo demostrar que las siguientes fórmulas, conocidas para funciones trigonométricas reales, siguen siendo válidas en el caso complejo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \tag{15}$$

al igual que las fórmulas de derivación,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z, \quad && \frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z, \quad && \frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z, \\ &\frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z, \quad && \frac{d}{dz} \cot z = -\csc^2 z, \quad && \frac{d}{dz} \csc z = -\csc z \cot z. \end{aligned} \tag{16}$$

A partir de (8) se sigue que la *fórmula de Euler* sigue siendo válida para valores complejos:

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z. \tag{17}$$

Es posible representar sencillamente las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en términos de funciones reales. En efecto, si se toma $z = x + iy$ en las fórmulas (14) entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos(iy) + \cos x \operatorname{sen}(iy) \\ \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy), \end{aligned}$$

y de (8) junto con la definición de seno y coseno hiperbólicos se sigue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(iy) &= \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i \operatorname{senh} y \\
\cos(iy) &= \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \\
\cos z &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,
\end{aligned} \tag{18}$$

las cuales son muy útiles para el cálculo numérico de $\operatorname{sen} z$ y de $\cos z$ al igual que para la solución de ecuaciones que involucren a dichas funciones. Además, es sencillo verificar a partir de éstas fórmulas que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \\
|\cos z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.
\end{aligned} \tag{19}$$

Dado que la función $\operatorname{senh} y$ tiende a infinito cuando y tiende a infinito, las ecuaciones (19) dejan ver que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ *no son acotadas* en el plano complejo! Esta es una diferencia notable con el caso real, pues como es bien conocido, $|\operatorname{sen} x|, |\cos x| \leq 1$ para todo x real.

5. Funciones hiperbólicas

Las funciones seno y coseno hiperbólicos de una variable compleja se definen de manera análoga al caso real, es decir

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{20}$$

Como la función e^z es analítica para todo z entonces $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ también lo son.

A partir de (8) y (20) se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh} z &= -i \operatorname{sen}(iz), & \operatorname{sen} z &= -i \operatorname{senh}(iz), \\
\cosh z &= \cos(iz), & \cos z &= \cosh(iz),
\end{aligned} \tag{21}$$

y de la periodicidad de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$, se sigue que $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ son periódicas con periodo $2\pi i$. Además,

$$\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z, \qquad \cosh(-z) = \cosh z. \tag{22}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z = 0 \quad &\text{si y sólo si} \quad z = n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ \cos z = 0 \quad &\text{si y sólo si} \quad z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) i \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{23}$$

A continuación se establecen las identidades de uso más frecuente con respecto a las funciones $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(z_1 + z_2) &= \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2 \\ \cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z &= \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y \\ \cosh z &= \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{senh} z|^2 &= \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y \\ |\cosh z|^2 &= \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y, \end{aligned} \tag{27}$$

donde $z = x + iy$.

Como en el caso real, definimos:

$$\begin{aligned} \tanh z &= \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \qquad & \coth z &= \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}, \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z}, \qquad & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\operatorname{senh} z}. \end{aligned} \tag{28}$$

Así, las funciones $\tanh z$ y $\operatorname{sech} z$ son analíticas excepto en aquellos puntos en los cuales $\cosh z$ sea cero, y las funciones $\coth z$ y $\operatorname{csch} z$ son analíticas salvo cuando $\operatorname{senh} z = 0$. Además, se tienen las fórmulas de derivación (análogas a las conocidas para las funciones hiperbólicas reales),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{senh} z = \cosh z, \quad & \frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z, \quad & \frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z, \\ \frac{d}{dz} \cosh z = \operatorname{senh} z, \quad & \frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z, \quad & \frac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z. \end{aligned} \tag{29}$$

5.1. Inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas

A manera de ejemplo, se ilustra el procedimiento para obtener la función inversa del seno complejo. Si $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ entonces $z = \operatorname{sen} w$ y de esta manera

$$\begin{aligned} z &= \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\ 2i\ z &= e^{iw} - e^{-iw} \\ 2i\ z &= e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}} \\ 2i\ z\left(e^{iw}\right) &= \left(e^{iw}\right)^2 - 1 \\ 0 &= \left(e^{iw}\right)^2 - 2i\ z\left(e^{iw}\right) - 1. \end{aligned}$$

Resolviendo la última ecuación cuadrática se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{iw} &= \frac{2i\ z + \sqrt{(-2i\ z)^2 - 4(1)(-1)}}{2} \\ &= \frac{2i\ z + 2\sqrt{-4z^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{2i\ z + 2\sqrt{1 - z^2}}{2} \\ &= iz + \sqrt{1 - z^2} \\ iw &= \log\left[iz + \sqrt{1 - z^2}\right] \\ w &= -i \log\left[iz + \sqrt{1 - z^2}\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}^{-1} z = -i \log\left[iz + \sqrt{1 - z^2}\right] \tag{30}$$

es una función multivaluada, por la presencia del logaritmo complejo.

Bibliografía

[1] R.V. Churchill, *Variable compleja con aplicaciones*, McGraw-Hill, New York. 1990.

[2] Peter V. O'Neil, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, International Thomson Editores, S.A. Quinta Edición. 2004.

[3] W. Allen Smith, *Elementary Complex Variables*, Charles E. Merrill Publishing Company, 1974.