UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
Matemáticas Especiales
Taller N° 2: Funciones complejas, límites, continuidad, derivabilidad y analiticidad

Grupo de Matemáticas Especiales

Objetivos

1. Determinar la existencia de límites de funciones de variable compleja. En caso de que existan calcularlos y en caso contrario justificar la no existencia de los mismos.

2. A partir de la definición de continuidad y de resultados conocidos determinar la continuidad de algunas funciones de variable compleja.

3. Determinar cuándo una función dada es derivable a partir de la definición y de resultados conocidos.

4. Estudiar la derivabilidad y analiticidad de funciones de variable compleja a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, e identificar los puntos singulares y regulares de tales funciones.

Ejercicios

1. Si $f(z) = z^2$, probar que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = z_0^2$.

2. Determine la existencia de los siguientes límites. En caso de que existan hállelos, en caso contrario justifique la no existencia.

   a) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ *c*) $\lim\limits_{z \to -4i} \dfrac{(z - i)(z + 4)}{z^2 + 1}$

   b) $\lim\limits_{z \to 1-i} (z^3 - 4z + 6)$

d) $\lim\limits_{z\to 1+i\sqrt{3}} \dfrac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$

f) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z^6+1}$

e) $\lim\limits_{z\to 1+i} \dfrac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2}$

g) $\lim\limits_{z\to 1+i} \left(\dfrac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right)^2$

h) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ si $f(z)=\begin{cases} z^2 & z\neq z_0 \\ 0 & z=z_0 \end{cases}$

i) $\lim\limits_{z\to i} f(z)$, si $f(z)=\begin{cases} z^2+2z & z\neq i \\ 3+2i & z=i \end{cases}$

3. Encontrar los puntos de discontinuidad de $f(z)=\dfrac{z^2+4}{z-2i}$.

4. Demostrar que $f(z)=\dfrac{z}{z^4+1}$ es continua en todos los puntos dentro y sobre el círculo unidad $|z|=1$ excepto en cuatro puntos, y determinar esos puntos.

5. Hallar todas las discontinuidades de las siguientes funciones.

   a) $f(z)=\dfrac{3z-2}{z^2+2z+2}$

   b) $f(z)=\dfrac{2z^2+4}{z^4-16}$

6. Mediante la definición, encontrar la derivada de las siguientes funciones.

   a) $f(z)=2z^3-2z+1.$

   b) $f(z)=2z^3+iz$

   c) $f(z)=3z^{-2}$

   d) $f(z)=\dfrac{2z-i}{z+2i}$

7. Demostrar que $\dfrac{d}{dz}\left(z^2\bar{z}\right)$ existe en ninguna parte.

8. Usando la definición demostrar que

   a) $\lim\limits_{z\to z_0} Re\ z = Re\ z_0$

   b) $\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$

   c) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0$

9. Hallar $f'(z)$ cuando

a) $f(z) = 4z^3 + 3z - 6$

b) $f(z) = (2 - 6z^5)^8$

c) $f(z) = \dfrac{2z - 6}{(3 - 4z)^2}, \ z \neq \dfrac{3}{4}$

d) $f(z) = \dfrac{(1 + 3z^5)^7}{z^3}$

10. Verifique que $f'(z)$ no existe en ningún punto si

a) $f(z) = \bar{z}$

b) $f(z) = Re\ z$

c) $f(z) = Im\ z$

d) $f(z) = 2x + ixy^2$

e) $f(z) = z - \bar{z}$

f) $f(z) = e^x e^{-iy}$

11. Verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

12. Verificar que las siguientes funciones son enteras.

a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

b) $f(z) = e^{-y} \sin x - ie^{-y} \cos x$

c) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$

13. Probar que las siguientes funciones son analíticas en ningún punto.

a) $f(z) = xy + iy$

b) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$

c) $f(z) = e^y e^{ix}$

14. Determinar los puntos singulares de las siguientes funciones.

a) $f(z) = \dfrac{3x + 1}{z(z^2 - 4)}$

b) $f(z) = \dfrac{5z + 4}{z^3 + 6z - 2}$

c) $f(z) = \dfrac{3}{(z - 1)(z^2 - 9)(z^2 + 2z - 7)}$