Universidad Antonio Nariño

Matemáticas Especiales
Guía N° 2: Funciones complejas, límites, continuidad, derivabilidad y analiticidad

Grupo de Matemáticas Especiales

Resumen

Se presenta la definición de función de variable compleja. A partir del estudio de límites de funciones, se abordan los conceptos de continuidad y derivabilidad. Se presentan las ecuaciones de Cauchy-Riemann y su relación con la diferenciabilidad y analiticidad de una función de variable compleja.

1. Funciones de una variable compleja

El concepto de función es totalmente análogo al estudiado en el caso de funciones de variable real:

Definición 1. Sea $S \subseteq \mathbb{C}$. La aplicación

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) = w \end{aligned}$$

se denomina una *función de variable compleja.*

Ejemplo 2. Son ejemplos de funciones de variable compleja:

1. $f(z) = z^2$.
   En este caso el dominio de definición de f es $\mathbb{C}$. Si $z = 3+4\ i$ entonces $f(z) = f(3+4\ i) = (3+4\ i)^2 = -7+24\ i$

2. $g(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.
   Esta función no está definida cuando $z^2+1 = 0$, es decir cuando $z = \pm i$. Por lo tanto, el dominio de definición de g es $\{z \in \mathbb{C}/\ z \neq i, -i\}$. Si $z = 1 - i$ entonces $g(z) = g(1-i) = \dfrac{1}{(1-i)^2+1} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}\ i$.

3. $h(z) = \dfrac{z}{z+\overline{z}}$.
   En este caso la función no está definida cuando $z+\overline{z} = 0$, pero $z+\overline{z} = 2\ Re(z)$, entonces el dominio de definición de h es $\{z \in \mathbb{C}/\ Re(z) \neq 0\}$. Si $z = -2+5i$ entonces
   $h(z) = h(-2+5i) = \dfrac{-2+5\ i}{(-2+5\ i)+(-2-5\ i)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{4}\ i$.
   $\diamondsuit$

Observación 1. Al tomar $z = x + iy$, $f(z)$ puede expresarse en términos de un par de funciones de valor real de las variables x e y, es decir,

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\ v(x,y), \tag{1}$$

donde $u(x,y)$ es la *parte real de* f y $v(x,y)$ es la *parte imaginaria de* f.

Ejemplo 3.

1. Si $f(z) = z^2$, entonces $f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i\ (2xy)$ y de esta manera
$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= 2xy. \end{aligned}$$

2. Si $f(z) = \dfrac{1}{z}$, con $z \neq 0$, entonces $f(x+iy) = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ y así
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) &= -\frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

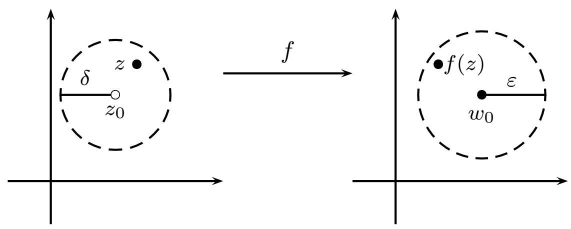
3. Si $f(z) = z^2 + 2z - 3$ entonces
$$\begin{aligned} f(x+iy) &= (x+iy)^2 + 2(x+iy) - 3 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy - 3 \\ &= (x^2 - y^2 + 2x) + i\ (2xy + 2y) \end{aligned}$$
   de donde $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ y $v(x,y) = 2xy + 2y$.
   $\diamondsuit$

2. Límites

Definición 4. Sean f una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f está definida alrededor de z_0. La igualdad

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{2}$$

formalmente significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$. Es decir, $f(z)$ puede hacerse tan próximo como se quiera a w_0 si se escoge z suficientemente cercano a z_0, pero distinto de él.



Propiedades

Sean f y g funciones de variable compleja definidas alrededor de z_0, tales que $\lim_{z \to z_0} f(z)$ y $\lim_{z \to z_0} g(z)$ existen.

1. Si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe entonces es *único*.
2. Si $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$, $z_0 = x_0 + i\ y_0$ y $w_0 = u_0 + i\ v_0$, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ si y sólo si
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$
3. $\lim_{z \to z_0} [c\ f(z)] = c \lim_{z \to z_0} f(z)$, con $c \in \mathbb{C}$ constante.
4. $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z)$.
5. $\lim_{z \to z_0} [f(z)\ g(z)] = \left[\lim_{z \to z_0} f(z)\right] \left[\lim_{z \to z_0} g(z)\right]$.

6. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$, siempre y cuando $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0$.

7. $\lim\limits_{z\to z_0} c = c$ para cada $c \in \mathbb{C}$ constante.

8. $\lim\limits_{z\to z_0} z = z_0$. En general, $\lim\limits_{z\to z_0} z^n = z_0^n$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$

9. $\lim\limits_{z\to z_0} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0$.

10. $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \left| \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \right|$.

Ejemplo 5. A continuación se presenta el cálculo de algunos límites y la demostración de no existencia de otros.

1. $\lim\limits_{z\to 1+i} 3\overline{z} = 3\ \overline{1+i} = 3(1-i) = 3 - 3i$.

2. $\lim\limits_{z\to i} (z - 2\overline{z} + i) = i - 2\ \overline{i} + i = 4i$.

3. $\lim\limits_{z\to 3+2i} z\ Im(z) = (3+2i)\ Im(3+2i) = (3+2i)2 = 6 + 4i$.

4. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^3 + 3z^2 + z + 3}{z^2 + 1}$.

   Nótese que al reemplazar z por i se llega a una indeterminación de la forma $0/0$. Sin embargo el numerador se puede factorizar como $z^3 + 3z^2 + z + 3 = (z^2+1)(z+3)^*$ y de esta manera se tiene

$$\lim_{z\to i} \frac{z^3 + 3z^2 + z + 3}{z^2 + 1} = \lim_{z\to i} \frac{(z^2+1)(z+3)}{z^2+1} = \lim_{z\to i} z + 3 = 3 + i.$$

5. $\lim\limits_{z\to \sqrt{2}\ i} \dfrac{2z^5 + 5z^2 - 8z + 10}{z^2 + 2}$.

   De nuevo la sustitución directa de z por $\sqrt{2}\ i$ lleva a una indeterminación. En este caso, $2z^5 + 5z^2 - 8z + 10 = (z^2+2)(2z^3 - 4z + 5)^{**}$ y

*Basta dividir $z^3 + 3z^2 + z + 3$ entre $z^2 + 1$.

**Basta dividir $2z^5 + 5z^2 - 8z + 10$ entre $z^2 + 2$.

así

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\sqrt{2}\,i}\frac{2z^5+5z^2-8z+10}{z^2+2} &= \lim_{z\to\sqrt{2}\,i}\frac{(z^2+2)(2z^3-4z+5)}{z^2+2}\\ &= \lim_{z\to\sqrt{2}\,i}(2z^3-4z+5) = 5-8\sqrt{2}\,i.\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\lim_{z\to 2i}\frac{2z^3-5z^2+8z-20}{z^3+3z^2+4z+12}$.

La sustitución de z por $2i$ nuevamente conlleva una indeterminación. En este caso tanto el numerador como el denominador se pueden factorizar***:

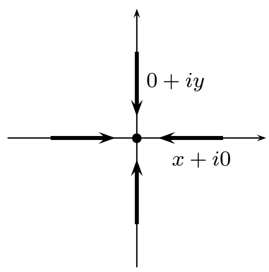
$$\begin{aligned}2z^3-5z^2+8z-20 &= (z-2i)(z+2i)(z+3) = (z^2+4)(2z-5)\\ z^3+3z^2+4z+12 &= (z-2i)(z+2i)(2z-5) = (z^2+4)(z+3)\end{aligned}$$

y de esta forma

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 2i}\frac{2z^3-5z^2+8z-20}{z^3+3z^2+4z+12} &= \lim_{z\to 2i}\frac{(z^2+4)(2z-5)}{(z^2+4)(z+3)} = \lim_{z\to 2i}\frac{2z-5}{z+3}\\ &= \frac{2(2i)-5}{2i+3} = -\frac{7}{13}+i\,\frac{22}{13}.\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z}{\overline{z}}$.

Si este límite existe entonces puede calcularse haciendo tender el punto $z=x+iy$ hacia el origen de cualquier manera. Sin embargo, al tomar puntos sobre el eje real y sobre el eje imaginario se tiene



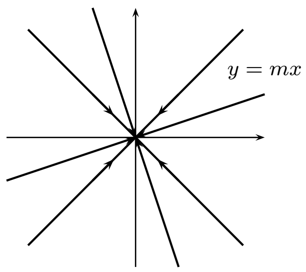
***Para ambos polinomios $2i$ es raíz, por lo tanto también lo es $-2i$ y por esta razón uno de los factores es z^2+4.

- Si $z = x + i0$ entonces $f(z) = \dfrac{x + i0}{x - i0} = \dfrac{x}{x} = 1 \xrightarrow{x \to 0} 1$.
- Si $z = 0 + iy$ entonces $f(z) = \dfrac{0 + iy}{0 - iy} = -\dfrac{iy}{iy} = -1 \xrightarrow{y \to 0} -1$.

Por lo tanto, en virtud de la unicidad del límite se concluye que el $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$ no existe.

8. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{Re(z)\ Im(z)}{z\ \overline{z}} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{Re(z)\ Im(z)}{|z|^2}$.

   En este caso se demuestra que el límite no existe haciendo tender el punto $z = x + iy$ hacia el origen por rectas de la forma $y = mx$:



   entonces

$$f(z) = f(x+iy) = f(x+i(mx)) = \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2} \xrightarrow{x \to 0} \frac{m}{1 + m^2},$$

   de donde para cada valor de m hay un valor para el límite, pero esto contradice el hecho de que el límite es único. Por lo tanto el $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{Re(z)\ Im(z)}{z\ \overline{z}}$ no existe.

$\diamondsuit$

3. Continuidad

Definición 6 (Continuidad en un punto). Sean f una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f está definida alrededor de z_0. Se dice que f es *continua en* z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Lo anterior es equivalente a:

1. f está definida en z_0, es decir, z_0 está en el dominio de f.
2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe.
3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Si f no verifica alguna de las condiciones anteriores se dice que f es *discontinua en* z_0.

Definición 7 (Continuidad en una región). Se dice que f es *continua en* $S \subseteq \mathbb{C}$ si f es continua en cada $z \in S$.

3.1. Propiedades

La continuidad en funciones de variable compleja verifica propiedades análogas al caso de funciones de variable real. Sean f y g funciones definidas alrededor de z_0,

1. Si $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ entonces f es continua en $z_0 = x_0 + i\ y_0$ si y sólo si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas en (x_0, y_0).
2. Si f y g son continuas en z_0 y c es una constante entonces las funciones $c \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ y $f \circ g$ son continuas en z_0, siempre y cuando estén definidas.
3. Si $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio entonces es continuo en cada $z_0 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 8. A continuación se analiza la continuidad de algunas funciones:

1. $f(z) = \sqrt{3}\ z^3 - 2z^2 + 8i\ z + 4$.
   Esta función es un polinomio y por lo tanto es continua en todo $\mathbb{C}$.
2. $g(z) = 3x + \operatorname{sen}(2xy) + i\ y^4$.
   En este caso las funciones parte real $u(x, y) = 3x + \operatorname{sen}(2xy)$ y parte imaginaria $v(x, y) = y^4$ son continuas en cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto g es continua en todo $\mathbb{C}$.
3. $f(z) = 1 + z$ para $z \neq 0$.
   El punto $z = 0$ es una discontinuidad de f ya que no pertenece al dominio de la función.

4. $h(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\overline{z}}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$

En este caso h está definida en $z = 0$, sin embargo h es discontinua allí pues $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$ no existe (Ver Ejemplo 5 numeral 7).

5. $f(z) = \begin{cases} z - 3 + 7i, & z \neq 3 - 7i \\ -i, & z = 3 - 7i \end{cases}.$

El punto $z = 3 - 7i$ pertenece al dominio de f. Sin embargo,

$$\lim_{z \to 3-7i} f(z) = \lim_{z \to 3-7i} (z - 3 + 7i) = 0 \neq -i = f(3 - 7i)$$

y de esta manera se tiene que f no es continua en $z = 3 - 7i$.

6. $g(z) = \begin{cases} \dfrac{2z^5 + 5z^2 - 8z + 10}{z^2 + 2}, & z \neq \pm\sqrt{2}\, i \\ 5 - 8\sqrt{2}\, i, & z = \sqrt{2}\, i \end{cases}$

La función g está definida en $z = \sqrt{2}\, i$ y además del Ejemplo 5 numeral 5, se sigue que

$$\lim_{z \to \sqrt{2}\, i} \frac{2z^5 + 5z^2 - 8z + 10}{z^2 + 2} = 5 - 8\sqrt{2}\, i = g(\sqrt{2}\, i),$$

luego g es continua en $\sqrt{2}\, i$.

¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de g en $z = -\sqrt{2}\, i$?

$\diamondsuit$

4. Derivabilidad

Definición 9. Sean f una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f está definida alrededor de z_0. Definimos la *derivada de f en z_0* como

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{3}$$

siempre que el límite exista. En este caso se dice que f es *diferenciable en* $z = z_0$.

Al tomar $\Delta z = z - z_0$ (incremento complejo), se tiene la siguiente versión alternativa de (3)

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{4}$$

Se dice que f es *diferenciable en* $S \subseteq \mathbb{C}$ si es derivable en cada punto $z \in S$ y la derivada se denota por $f'(z) = f' = \dfrac{df}{dz}$.

Ejemplo 10. A partir de la definición determine la derivada de las funciones:

1. $f(z) = z^2$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\ \Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = 2z$$

2. $g(z) = \dfrac{1}{z}$ con $z \neq 0$.

$$g'(z)) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1}{z + \Delta z} - \dfrac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{-\Delta z}{z(z + \Delta z)}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{z(z + \Delta z)} = -\frac{1}{z^2}$$

$\diamondsuit$

Observación 2. Si una función f es diferenciable en z_0 entonces también es continua en z_0. Sin embargo, el recíproco no es cierto, existen funciones que siendo continuas en un punto no son diferenciables allí.

Ejemplo 11. La función $f(z) = \overline{z}$ es continua en $\mathbb{C}$ pero es diferenciable en ninguna parte.
En primer lugar f está definida para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ y además,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \overline{z} = \overline{z_0} = f(z_0),$$

de donde se sigue la continuidad de f. Pero

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

y este último límite no existe. (En efecto, al acercarse a 0 por el eje real $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \to 1$ pero al hacerlo por el eje imaginario $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \to -1$). Por lo tanto f es derivable en ningún punto. $\diamondsuit$

Propiedades

Sean f y g funciones diferenciables en z. Se tienen las siguientes reglas de derivación:

1. $\dfrac{d}{dz}\, c = 0$, para cada constante $c \in \mathbb{C}$.
2. $\dfrac{d}{dz}\, z = 1$. En general $\dfrac{d}{dz}\, z^n = n\, z^{n-1}$ para cada n entero no negativo.
3. $\dfrac{d}{dz}\, [c\ f(z)] = c\ f'(z)$ con $c \in \mathbb{C}$.
4. $\dfrac{d}{dz}\, [f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$.
5. $\dfrac{d}{dz}\, [f(z)\ g(z)] = f'(z)\ g(z) + f(z)\ g'(z)$.
6. $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{f'(z)\ g(z) - f(z)\ g'(z)}{[g(z)]^2}$, siempre que $g(z) \neq 0$.
7. $\dfrac{d}{dz}\, f\,(g(z)) = f'\,(g(z))\ \ g'(z)$ *(Regla de la cadena)*

Ejemplo 12. Cálculo de derivadas a partir de las reglas.

1. $f(z) = z^5 + 3i\ z^3 + 8z^2 + (1 + \sqrt{3}i)z - 7.$

$$\begin{aligned} f'(z) &= 5z^4 + 3i(3z^2) + 8(2z) + (1 + \sqrt{3}i) \\ &= 5z^4 + 9i\ z^2 + 16z + 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

2. $g(z) = \dfrac{2z - i}{z + 5i}$ para $z \neq -5i$.

$$g'(z) = \frac{2(z+5i) - (2z-i)1}{(z+5i)^2} = \frac{2z + 10i - 2z + i}{(z+5i)^2} = \frac{11i}{(z+5i)^2}$$

3. $h(z) = \left(\dfrac{2z^2+3}{4z^3+i}\right)^5$

$$h'(z) = 5\left(\frac{2z^2+3}{4z^3+i}\right)^4 \left[\frac{4z(4z^3+i) - (2z^2+3)12z^2}{(4z^3+i)^2}\right]$$

$\diamondsuit$

5. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

De la misma forma como los límites y la continuidad de una función $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ se pueden caracterizar a partir de los límites y la continuidad de las funciones componentes $u(x,y)$ y $v(x,y)$, la derivabilidad de una función en un punto se puede determinar a partir de ciertas condiciones que verifican la parte real y la parte imaginaria de f. Sin embargo no basta pedir que las derivadas parciales de u y v existan, se necesita una hipótesis adicional. Por ejemplo, se sabe que $f(z) = \overline{z}$ es derivable en ninguna parte y sin embargo $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = -y$ tienen derivadas parciales en todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

A continuación se caracteriza la diferenciabilidad de una función en términos de sus funciones componentes.

Definición 13. Sea $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ una función de variable compleja. Las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* (ECR) para f son

$$u_x = v_y \qquad\qquad u_y = -v_x \tag{5}$$

Teorema 14. *Si $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ es diferenciable en $z_0 = x_0 + i\ y_0$ en un dominio D[****], entonces las derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y existen en (x_0, y_0) y además satisfacen las ECR (5) en este punto, es decir,*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

y además la derivada en z_0 se puede calcular como sigue

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\ v_x(x_0, y_0) \tag{6}$$

La pregunta obvia que surge es, ¿si se satisfacen las ECR se puede concluir que la función es diferenciable? La respuesta es no directamente, se necesita una condición adicional.

Teorema 15. *Sea $f(z) = u(x, y)+i\ v(x, y)$ una función de variable compleja definida en un dominio que contenga a $z_0 = x_0 + i\ y_0$ y tal que las derivadas parciales de primer orden de u y v existen en tal dominio. Si u_x, u_y, v_x, v_y son continuas en (x_0, y_0) y satisfacen las ECR en (x_0, y_0) entonces $f'(z_0)$ existe, es decir f es diferenciable en z_0 y (6) sigue siendo válida.*

Ejemplo 16. A continuación se analiza la diferenciabilidad de algunas funciones a partir de las ECR.

1. $f(z) = z^2$.
   Del ejemplo 3 se tiene que $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$, entonces

   $$u_x = 2x, \quad u_y = -2y, \quad v_x = 2y, \quad v_y = 2x$$

   y de esta manera $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto f es diferenciable en $\mathbb{C}$ y además de (6) se sigue que

   $$f'(z) = u_x + i\ v_x = 2x + i\ 2y = 2(x + iy) = 2z,$$

   tal como se había demostrado a partir de la definición de derivada.

2. $g(z) = iz + 2$.
   En este caso $g(z) = g(x + iy) = i(x + iy) + 2 = 2 - y + ix$, de donde $u(x, y) = 2 - y$ y $v(x, y) = x$. Entonces

   $$u_x = 0, \quad u_y = -1, \quad v_x = 1, \quad v_y = 0,$$

   luego $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como además las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ entonces g es derivable en $\mathbb{C}$ y $g'(z) = u_x(x, y) + i\ v_x(x, y) = 0 + i\ 1 = i$.

[****]Un *Dominio* es un conjunto abierto y conexo.

3. $f(z) = |z|^2$.
Si $z = x + iy$, $f(z) = f(x + iy) = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$, luego $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = 0$. Entonces

$$u_x = 2x, \quad u_y = 2y, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0,$$

de donde las ECR sólo se satisfacen sólo cuando $x = y = 0$. Por lo tanto, f es no es diferenciable en $z \neq 0$. Además, dado que u_x, u_y, v_x, v_y son continuas en $(0, 0)$ entonces f es diferenciable en $z = 0$ y $f'(0) = u_x(0, 0) + i\ v_x(0, 0) = 0$.

4. $g(z) = \dfrac{1}{z}$.
Del ejemplo 3 se sigue que $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ y $v(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$. A partir de cálculos sencillos se obtiene

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$u_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \qquad v_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

y así $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ siempre y cuando $x, y \neq 0$. Además, para $z \neq 0$

$$g'(z) = u_x + i\ v_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i\ \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

5. $f(z) = \overline{z}$.
En este caso $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = -y$. Entonces

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 1,$$

luego $u_x \neq v_y$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y de esta manera f es derivable en ningún punto, tal como se había demostrado antes a partir de la definición de derivada.

6. $f(z) = z\ Im(z)$.
Si $z = x + iy$, $f(z) = f(x + iy) = (x + iy)\ Im(x + iy) = xy + i\ y^2$, de donde $u(x, y) = xy$ y $v(x, y) = y^2$. Entonces

$$u_x = y, \quad u_y = x, \quad v_x = 0, \quad v_y = 2y$$

y de esta forma las ECR se satisfacen sólo cuando $x = y = 0$. Además, como las derivadas parciales son continuas en $(0, 0)$ entonces $f'(0) = u_x(0, 0) + i\ v_x(0, 0) = 0$.

$\diamondsuit$

5.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar

Al usar la forma polar $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ la función $f(z)$ queda expresada en términos de las nuevas variables r y θ, es decir,

$$f(z) = u(r,\theta) + i\ v(r,\theta).$$

Usando regla de la cadena y el hecho de que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, se obtienen las *ECR en forma polar*:

$$u_r = \frac{1}{r}\ v_\theta \qquad v_r = -\frac{1}{r}\ u_\theta \tag{7}$$

Ejemplo 17. Sea $f(z) = z^3$. Si $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ entonces

$$f(z) = r^3(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^3\left[\cos(3\theta) + i\,\mathrm{sen}(3\theta)\right],$$

de donde $u(r,\theta) = r^3\cos(3\theta)$ y $v(r,\theta) = r^3\,\mathrm{sen}(3\theta)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} u_r &= 3r^2\cos(3\theta) \\ u_\theta &= -3r^3\,\mathrm{sen}(3\theta) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} v_r &= 3r^2\,\mathrm{sen}(3\theta) \\ v_\theta &= 3r^3\cos(3\theta) \end{aligned}$$

y claramente se satisfacen las ECR en forma polar (7). Además dado que las derivadas parciales son continuas en todo (r,θ) se sigue que f es derivable en todo $z \neq 0$. $\diamondsuit$

6. Analiticidad

Definición 18. Sean f una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que f es *analítica en* z_0 si está definida y es diferenciable en cada punto de alguna ε-vecindad $|z - z_0| < \varepsilon$ de z_0. Son sinónimos de analítica los términos *regular* y *holomorfas.*

Si f es analítica en cada punto de $S \subseteq \mathbb{C}$ entonces f se dice *analítica en* S. En particular f es *entera* si es analítica en todo el plano complejo.

Definición 19. Si f es analítica en z_0, se dice que z_0 es un *punto regular* de f. Por otra parte, si f no es analítica en z_0 pero es analítica en algún punto de cada ε-vecindad de z_0, entonces z_0 es *punto singular* o *singularidad* de f.

Observación 3. Como consecuencia de las propiedades de derivación, se tiene que si dos funciones son analíticas en un punto entonces también lo son su suma, diferencia, producto, cociente y composición (donde esté definidos).

Observación 4. Si f es una función de variable compleja y su derivada es cero en un dominio D, entonces la función es constante sobre D.

Ejemplo 20. A continuación se estudia la analiticidad de algunas funciones de variable compleja:

1. $f(z) = \dfrac{1}{z}$.
   Del ejemplo 16, f es derivable en todos los $z \neq 0$, por lo tanto f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $z = 0$ es un punto singular.

2. $g(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$.
   Se tiene que $u(x, y) = 2xy$ y $v(x, y) = x^2 - y^2$, entonces

   $$u_x = 2y, \quad u_y = 2x, \quad v_x = 2x, \quad v_y = -2y$$

   y de esta manera las ECR se satisfacen sólo cuando $x = y = 0$, luego g es diferenciable sólo en $z = 0$ y por tanto analítica en ningún punto.

3. $f(z) = |z|^2$.
   Nuevamente del ejemplo 16, f es derivable en sólo en $z = 0$ y de aquí f es analítica en ningún punto y por lo tanto carece de puntos singulares.

4. $g(z) = \dfrac{3z + 1}{z^2 - 3z + 2}$.
   Esta función es el cociente de dos polinomios, entonces es analítica excepto en los puntos donde el denominador es cero. Por lo tanto g es analítica salvo en $z_1 = 2$ y $z_2 = -1$, es decir en $\mathbb{C} \setminus \{2, -1\}$ y estos puntos son las singularidades de g.

5. $h(z) = \dfrac{z^2 + 1}{(z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$.
   Igual que en el caso anterior, esta función es analítica salvo en los puntos donde el denominador es cero. Las raíces del polinomio z^2+2z+2 son $z = -1 \pm i$ y por lo tanto h es analítica en $\mathbb{C} - \{-2, -1+i, -1-i\}$ y las singularidades de h son $z_1 = -2$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$.

6. $f(z) = e^{-y} \operatorname{sen} x - ie^{-y} \cos x$.
   En este caso $u(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x$ y $v(x, y) = -e^{-y} \cos x$ y de esta manera,

$$u_x = e^{-y}\cos x \qquad\qquad v_x = e^{-y}\operatorname{sen} x$$
$$u_y = -e^{-y}\operatorname{sen} x \qquad\qquad v_y = e^{-y}\cos x.$$

Entonces las ECR se satisfacen en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y como las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ entonces f es derivable y por tanto analítica en $\mathbb{C}$, esto es f es entera.

7. $h(z) = e^y\ e^{ix}$.
Usando la fórmula de Euler para los reales

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x,$$

entonces $h(z) = e^y \cos x + i\ e^y \operatorname{sen} x$ y de esta manera $u(x, y) = e^y \cos x$, $v(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$ y

$$u_x = -e^y\operatorname{sen} x \qquad\qquad v_x = e^y\cos x$$
$$u_y = e^y\cos x \qquad\qquad v_y = e^y\operatorname{sen} x,$$

pero no existe ningún valor de x que satisfaga simultáneamente que $\operatorname{sen} x = 0$ y $\cos x = 0$, por lo tanto las ECR se satisfacen en ningún punto y así f es diferenciable y analítica en ningún punto.

$\diamondsuit$

Bibliografía

[1] R.V. Churchill, *Variable compleja con aplicaciones*, McGraw-Hill, New York. 1990.

[2] Peter V. O'Neil, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, International Thomson Editores, S.A. Quinta Edición. 2004.

[3] W. Allen Smith, *Elementary Complex Variables*, Charles E. Merrill Publishing Company, 1974.